Das Spektrum einer Riemannschen Mft.

Definition: Das Spektrum einer Riemannschen Mft. (M^n,g) ist definiert als

$$\mathrm{Spec}(M,g) = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in C^\infty(M),\ f \neq 0: \ \Delta f = \lambda f \}$$

Bemerkung:

- Ab jetzt: M kompakt, zusammenhängend, orientiert
- $\mathrm{Spec}(M,g) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$

  da: $\Delta f = \lambda f \ \rightarrow \ (\Delta f, f) = \|df\|^2 = \lambda \cdot \|f\|^2 \geq 0$
- $0 \in \mathrm{Spec}(M,g)$: $\Delta f = 0 \iff f$ konstant
- $E_\lambda := \{ f \in C^\infty(M) \mid \Delta f = \lambda f \} = E_\lambda(M,g)$ — Eigenraum zum Eigenwert λ; f: Eigenfunktion zum Eigenwert λ
- $\mathrm{Spec}(M,g) = \{ 0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \}$ $\quad \lambda_i \to \infty$
- $\dim E_\lambda(M,g) < \infty$ $\quad$ (= Vielfachheit des Eigenwerts λ)
- $\bigoplus_\lambda E_\lambda(M,g)$ ist eine orthogonale Summe, liegt dicht in $C^\infty(M)$

  (bzgl. gleichmäßiger Konvergenz, bzgl. der Prä-Norm $\|\cdot\|$)
- Es existiert ein vollständiges Orthonormalsystem von Δ-Eigenfunktionen

Bemerkung:

- Die Information des Spektrums ist in der Partitionsfunktion (Zustandssumme) enthalten. $\quad$ hier: $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$$Z(M,g;t) := \sum_{i=0}^{\infty} m_i \, e^{-\lambda_i t} \qquad (m_0 = 1 \, !)$$

mit $m_i := \dim E_{\lambda_i}(M,g)$

- $Z(M,g;t)$ ist wohl-definiert für $t > 0$
  - gleichmäßig konvergent auf $[t_0, \infty)$ für alle $t_0 > 0$

    $\Rightarrow$ stetig auf $(0,\infty)$

Die Funktion Z bestimmt das Spektrum

Sei $\mu > 0$, dann bildet man $e^{\mu t} \cdot Z(t)$

- $\mu < \lambda_1 \quad \rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \left(e^{\mu t} Z(t) - e^{\mu t} \right)$

$$= \lim_{t\to\infty} \sum_{i>0} m_i \, e^{(\mu-\lambda_i)t} = 0$$

- $\mu = \lambda_1 \quad \lim_{t\to\infty} \left(e^{\mu t} Z(t) - e^{\mu t} \right)$

$$= m_1 + \lim_{t\to\infty} \sum_{i>1} m_i \, e^{(\mu-\lambda_i)t} = m_1$$

- $\mu > \lambda_1 \quad \lim_{t\to\infty} \left(e^{\mu t} Z(t) - e^{\mu t} \right) = \infty$

dh. λ_1 ist also das eindeutig bestimmte μ, für das $e^{\mu t} Z(t) - e^{\mu t}$ einen positiven Grenzwert hat $t \to \infty$ und dieser Grenzwert ist m_1

Rekursiv erhält man dann:

λ_i ist das eindeutig bestimmte μ, für das
$$e^{\mu t} Z(t) - \sum_{j=0}^{i-1} m_j \, e^{(\mu-\lambda_j)t}$$
einen positiven Grenzwert hat und dieser Grenzwert ist m_i. $t \to \infty$

<u>Bemerkung</u>: Die Zeta-Funktion des Laplace-Operators ist eine ähnliche Funktion. Man definiert.

$$Z(s) = tr(\Delta^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-s} \cdot m_n \qquad s \in \mathbb{C}$$

$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots !$

holomorph für $\operatorname{Re} s$ hinreichend groß, mit meromorpher Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$

Berechng + Untersuchg mit Kern der Wärmeleitungsgleichg

z.B.: $M = S^1$

$$Z(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n^2)^s} = 2\,\zeta(2s)$$

ζ: Riemannsche Zeta-Funktion

Entwicklung von Minakshisundaram-Pleijel

Bemerkung: Die Partitionsfunktion $Z(t)$ hat folgende asymptotische Entwicklung:

$$Z(t) \underset{t \to 0_+}{\sim} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left(a_0 + a_1 t + \dots \right)$$

mit $a_i = \int_M u_i(m,m)\, vol_g$ $\quad$ (u_i: universelle Polynome in R)

Def $\longrightarrow$

Folgerung: Seien (M,g), (M',g') zwei Riemannsche Mfk mit $\mathrm{Spec}(M,g) = \mathrm{Spec}(M',g')$. Dann gilt: $\dim M = \dim M'$

Satz: $a_0 = vol(M,g)$

d.h. $\mathrm{Spec}(M,g) = \mathrm{Spec}(M',g') \longrightarrow vol(M,g) = vol(M',g')$

Satz: $a_1 = \frac{1}{6} \int scal_g\, vol_g$

d.h. isospektrale Mfk. haben die gleichen totalen Skalarkrümmungen

Definition: Sei $f: \mathbb{R}_+ \to E$ eine Funktion mit E Banach-Raum. Eine formale Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)$ mit Funktionen $a_k: \mathbb{R}_+ \to E$ heißt asymptotische Entwicklung von f nahe Null, man schreibt

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)$$

falls $\forall_n \ \exists_{\ell_n} \ \forall_{\ell \geq \ell_n} \ \exists_{C_{\ell,n}} : \ \left\| f(t) - \sum_{k=0}^{\ell} a_k(t) \right\| \leq C_{\ell,n} |t|^n$

Bemerkung:
- Für alle n approximieren fast alle Partialsummen die Funktion f mit einem Fehler der Ordnung t^n
- Asymptotische Entwicklungen müssen nicht konvergieren
- Beispiel: Taylor-Reihe $\sum \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, t^k$

  immer asymptotische Entwicklung, konvergent nur, falls f analytisch nahe 0 ist.

Lemma: Sei (M, g) eine Riemannsche Mfk. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ sei ein Unterraum $V_i \subset C^\infty(M)$ gegeben, so dass

1. $\forall_i \; \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : \Delta f = \lambda_i f$ für alle $f \in V_i$
2. $\bigoplus_i V_i$ liegt dicht in $C^\infty(M)$ bzgl. der Frécheltnorm $\|\cdot\|$

Dann ist $\operatorname{Spec}(M,g) = \{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und jeder Raum V_i ist der Eigenraum zum Eigenwert λ_i

Beweis: • $V_i \subset E_{\lambda_i}$ $\underline{\text{dh}}$ $\lambda_i \in \operatorname{Spec}(M,g)$ $\forall_i$

• $\lambda \in \operatorname{Spec}(M,g)$: $E_\lambda \neq \{0\}$

Annahme: $\lambda \neq \lambda_i$ für alle λ_i $\forall_i$

$\rightarrow E_\lambda \perp V_i \quad \forall_i$ $\lightning$ $\underline{\text{da}}$ $\bigoplus V_i \subset C^\infty(M)$ dicht

$\underline{\text{dh.}}$ $\operatorname{Spec}(M,g) = \{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

• $V_i \subset E_{\lambda_i} \rightarrow \dim V_i < \infty$

$\rightarrow V_i \subset C^\infty(M)$ abgeschlossen

Annahme: $V_i \subsetneq E_{\lambda_i}$

$\rightarrow \exists \varphi \in E_{\lambda_i} : \varphi \perp V_i$

aber auch: $\varphi \perp V_j \quad \forall j \neq i$

$\rightarrow \varphi \perp \bigoplus V_i$ $\lightning$

$\rightarrow V_i = E_{\lambda_i}$

Lemma: (Satz von Stone-Weierstraß)

Sei M eine kompakte Mfk. und sei $\mathcal{A} \subset C^0(M)$ eine Unteralgebra mit.

(i) $\mathcal{A}$ trennt Punkte, dh. $\forall_{p,q} \in M \; \exists f \in \mathcal{A}: f(p) \neq f(q)$

(ii) Die Konstanten liegen in $\mathcal{A}$

Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $C^0(M)$ und damit auch in $C^\infty(M)$ bzgl. gleichmäßiger Konvergenz.

Folgerung. Seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mft. Dann gilt für das Spektrum des Laplace Operators $\Delta^{M\times N}$ auf $M \times N$.

$$\mathrm{Spec}(M \times N, g \oplus h) = \{ \lambda + \mu \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(M, g),\ \mu \in \mathrm{Spec}(N, h) \}$$

Für die Eigenräume gilt.

$$E_\nu(M \times N, g \oplus h) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(M,g) \\ \mu \in \mathrm{Spec}(N,h) \\ \lambda + \mu = \nu}} E_\lambda(M, g) \otimes E_\mu(N, h)$$

Beweis: • $W_\nu := \bigoplus_{\lambda+\mu=\nu} E_\lambda(M, g) \otimes E_\mu(N, h)$

$\rightarrow \quad W_\nu \subset E_\nu(M \times N, g \oplus h)$ (schon gezeigt)

zz: $\bigoplus W_\mu \subset C^\infty(M \times N)$ dicht

da: • $\bigoplus_\lambda E_\lambda(M, g) \subset C^\infty(M)$, $\bigoplus_\mu E_\mu(N, h) \subset C^\infty(N)$ dicht

• oder Stone – Weierstrass

Bemerkung. $Z(M \times N, g + h) = Z(M, g) \cdot Z(N, h)$

Folgerung. Sei $(\tilde{M}, \tilde{g}) \xrightarrow{p} (M, g)$ eine Überlagerung oder eine Riemannsche Submersion mit total-geodätischen Fasern. Dann sind die Eigenfunktionen von (M, g) genau die Projektionen von Eigenfunktionen auf $(\tilde{M}, \tilde{g})$, die konstant auf den Fasern sind.

Beweis: • $f \in E_\lambda(M, g) \quad \rightarrow \quad f \circ p \in E_\lambda(\tilde{M}, \tilde{g})$, $\lambda \in \mathrm{spec}(\tilde{M}, \tilde{g})$

da $\Delta^{\tilde{M}}(f \circ p) = (\Delta^M f) \circ p = \lambda f \circ p$

• umgekehrt: $\tilde{f} \in E_{\tilde{\lambda}}(\tilde{M}, \tilde{g})$ sei konstant entlang der Faser

$\rightarrow \quad \exists f \in C^\infty(M): \quad \tilde{f} = f \circ p$

$\rightarrow \quad \Delta^{\tilde{M}} \tilde{f} = (\Delta^M f) \circ p = \tilde{\lambda} f \circ p$

$\rightarrow \quad \Delta^M f = \tilde{\lambda} f$

$\Rightarrow \quad f \in E_{\tilde{\lambda}}(M, g), \quad \tilde{\lambda} \in \mathrm{spec}(M, g)$

Der Laplace-Operator auf der Sphäre

Satz: Sei f eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt:

$$(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f)\big|_{S^n} = \Delta^{S^n}(f|_{S^n}) - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\Big|_{S^n} - n\,\frac{\partial f}{\partial r}$$

Beweis: Sei $v = p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und sei $v_1, \dots, v_n$ eine ONB in $T_p S^n = p^\perp$

Geodätische zu v_i durch p:

$$\gamma_i(t) = \cos t \cdot p + \sin t \cdot v_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma_i(t)) = df(\dot\gamma_i(t)) = df(-\sin t\, p + \cos t\, v_i)$$

$$= -\sin t\; v(f) + \cos t\; v_i(f) \qquad \text{in } \gamma_i(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} f(\gamma_i(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (-\sin t \cdot v(f) + \cos t \cdot v_i(f))$$

$$= -v(f) + v_i(v_i(f)) \qquad \text{in } \gamma_i(0)$$

$$\Rightarrow \Delta^{S^n}(f|_{S^n})_p = -\sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} f(\gamma_i(t))$$

$$= -\sum_{i=1}^n v_i(v_i(f))_{\gamma_i(0)} + n\, v(f)_p$$

$$= (\Delta^{\mathbb{R}^n} f)_p + v(v(f))_p + n\, v(f)_p$$

$\rightarrow$ Formel, denn $v(f) = \frac{\partial f}{\partial r}$